Թեմա 4

Թվային ուղիղը որպես տոպոլոգիական տարածության նախատիպ: Տոպոլոգիա բազմության վրա, տոպոլոգիական տարածության հասկացությունը, տոպոլոգիաների համեմատումը: Տոպոլոգիական տարածության այլընտրանքային սահմանում հիմնված կետի շրջակայք հասկացության վրա:

Տոպոլոգիան երկրաչափության բաժին է, որի հիմքում ընկած են տոպոլոգիական տարածություն և տոպոլոգիական տարածությունների անընդհատ արտապատկերում հասկացությունները: Եթե տարրական երկրաչափությունը ուսումնասիրում է երկրաչափական պատկերների այն հատկությունները, որոնք պահպանվում են (ինվարիանտ են) իզոմետրիկ ձևափոխությունների դեպքում (այսինքն այնպիսի ձևափոխությունների դեպքում, որոնք չեն փոխում կետերի միջև հեռավորությունները), ապա տոպոլոգիան ուսումնասիրում է երկրաչափական պատկերների այն հատկությունները, որոնք անփոփոխ են այդ պատկերների ցանկացած **անընդհատ** ձևափոխությունների դեպքում: Ձևաբանությունը կոչված է սահմանելու, եթե ապա ինչպես բաժանված Դրանք կետերը աստիճանաբար հեռանում է միմյանց բաժանման մեջ չեն գալիս: շարունակաբար հեռացնելով են մի շարք գաղտնի երկրաչափությունների էվկլիդեսյան, աֆինական, պրոյեկտիվ, ոչ էվկլիդեսյան և այլն: Դրանցից յուրաքանչյուրի հիմքում ընկած է իրեն բնորոշ ձևափոխությունների խումբ: Նկատենք, որ ձևափոխությունների այդ խմբերը, այս կամ այլ իմաստով լինելով իրարից տարբեր, ունեն մի ընդհանուր առանձնահատկություն՝ դրանց տարրերը (ձևափոխությունները) անընդհատ են:

Ուստի կարող ենք ասել, որ տոպոլոգիան բոլոր հնարավոր երկրաչափությունների ընդհանուր մասն է, և այդ իմաստով կարող է դիտվել որպես վերջնական և բոլորի հիմքում ընկած յուրահատուկ երկրաչափություն:

Ընդհանրապես տոպոլոգիայում երկրաչափական պատկերները հանդես են գալիս որպես հատուկ կառուցվածքով, վերացական բնույթի կետերի բազմություններ, որոնց անվանում են տոպոլոգիական տարածություններ: Տոպոլոգիական տարածություն հասկացությունը անցել է ձևավորման և կայացման երկար ուղի: Սկզբնական շրջանում (1900-1930 թթ.) այն ունեցել է տարբեր անվանումներ՝ շրջակայքային տարածություն, փակման գործողությունով տարածություն, մետրիկայի տարածություն: Դրանց նվիրված էր երկու գլուխ Ֆ. Հաուսդորֆի «Բազմությունների տեսություն» նշանավոր գրքի 1914 և 1927 թվերի հրատարակումներում որպես բազմությունների տեսության ենթաբաժիններ : Եվ միայն 1930 թվին ամերիկացի մաթեմատիկոս Ս. Լեֆշեցը հրապարակեց գիրք «Տոպոլոգիա» (Topology) անվանումով, որտեղ տոպոլոգիան ներկայացված է որպես երկրաչափություն հիմնված, և հետագայում համընդհանուր հավանության արժանացած, աքսիոմների համակարգի վրա:

Մինչև այդ աքսիոմները ներկայացնելը քննարկենք տոպոլոգիական տարածության մի օրինակ, որը հանդիսացել է նախատիպ՝ տոպոլոգիական տարածություն

ընդհանուր հասկացության համար:

Մաթեմատիկական անալիզի դասընթացում դիտարկվում են թվային ուղղի կետերին և ենթաբազմություններին առնչվող մի շարք հասկացություններ՝ կետի ε-շրջակայք, ենթաբազմության ներքին կետ, հպման կետ, բաց ենթաբազմություն, փակ ենթաբազմություն, զուգամետ հաջորդականություն: Այդ հասկացություններից որևէ մեկը կանվանենք **հիմնային հասկացություն**, եթե մյուսները կարող են սահմանվել դրա միջոցով:

Ցույց տանք, որ կետի ε-շրջակայքը հիմնային հասկացություն է: Հիշեցնենք, որ թվային ուղղի x_0 կետի ε-շրջակայք կոչվում է $|x-x_0|<\varepsilon$ (որտեղ ε-ը 0-ից մեծ թիվ է) պայմանին բավարարող բոլոր x թվերի բազմությունը, կամ որ նույնն է՝ $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ ինտերվալը: Այնուհետև՝ $X \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմության x_0 կետը կոչվում է X-ի ներքին կետ, եթե գոյություն ունի x_0-ի որևէ ε-շրջակայք, որն ամբողջությամբ ընկած է X-ում՝ $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subset X$: Օրինակ՝ $X=\{-2\}\cup(1,3]\cup[5,+\infty)$ ենթաբազմության համար ներքին կետեր են իր բոլոր կետերը բացառությամբ $-2, 3, 5$ կետերի (ինչո՞ւ):

Ըստ սահմանման՝ թվային ուղղի ենթաբազմություն կոչվում է բաց ենթաբազմություն, եթե բոլոր կետերը ներքին կետեր են: Օրինակ՝ պարզ է, որ ամեն մի (a,b) ինտերվալ բաց ենթաբազմություն է (հիմնավորե՛ք):

Ենթաբազմության հպման կետ հասկացությունը նույնպես սահմանվում է կետի ε-շրջակայք հասկացությունով. x_0 կետը կոչվում է $X \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմության հպման կետ, եթե այդ կետի ցանկացած ε-շրջակայք ունի ոչ դատարկ հատում X-ի հետ: Պարզ է, որ ցանկացած ենթաբազմության բոլոր կետերը հպման կետեր են իր համար: Իսկ օրինակ՝ $X=\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}\cup[2,4)\cup(5,+\infty)$ ենթաբազմության համար բացի սեփական կետերից հպման կետեր են նաև իրեն չպատկանող $0, 4, 5$ կետերը (հիմնավորե՛ք):

Թվային ուղղի ենթաբազմությունը կոչվում է փակ ենթաբազմություն, եթե այն պարունակում է իր բոլոր հպման կետերը: Հետևաբար՝ փակ ենթաբազմություններ են թվային ուղղի բոլոր միկետանոց $\{a\}$, ~~ինչպես նաև~~ բոլոր $[a,b]$, $(-\infty,a]$, $[b,+\infty)$ տեսքերի ենթաբազմությունները, Ուստի, մեծ հաշվով, փակ ենթաբազմությունը նույնպես սահմանվում է կետի ε-շրջակայք հասկացությունով:

Վերջապես պարզ է նաև, որ զուգամետ հաջորդականություն հասկացությունը ևս սահմանվում է ε-շրջակայք հասկացությունով (հիմնավորե՛ք):

Այսպիսով, կետի ε-շրջակայք հասկացությունը հիմնային հասկացություն է թվային ուղղի համար, և այս փաստը կարձանագրենք կարճ՝ ասելով, որ կետի ε-շրջակայք հասկացությունը որոշում է տոպոլոգիա թվային ուղղի վրա:

Այժմ ցույց տանք, որ թվային ուղղի համար հիմնային հասկացություն է նաև բաց ենթաբազմություն հասկացությունը: Այդ նպատակով նախ ճշտենք թվային ուղղի բաց ենթաբազմություն հասկացությունը՝ առանց հիմնվելու կետի ε-շրջակայք հասկացության վրա:

Բաց բազմությունների ինտուիտիվ ընկալվող առաջին օրինակները (a,b) տեսքի ինտերվալներն են: Ի տարբերություն $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ տեսքերի միջակայքերի, որոնք

«ցանկապատված են» մի կամ երկու կողմից a, b կետերով, (a, b) ինտերվալները ցանկապատ չունեն և բաց են երկու կողմից: Ուստի բնական կլինի թվային ուղղի որևէ X ենթաբազմություն համարել նոա բաց ենթաբազմություն, եթե X-ի գոյություն ունի որևէ (a, b) ինտերվալ, որ $x_0 \in (a, b)$ և (a, b)-ն ընկած է X-ում: Այսպեղից որպես հետևանք ստանում ենք. թվային ուղղի որևէ X ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն կամ ինտերվալ է, կամ ներկայացվում է որպես ինտերվալների միավորում:

Այժմ կարող ենք ընդլայնել նաև կետի ε-շրջակայք հասկացությունը, ներմուծելով նոր՝ **կետի շրջակայք** հասկացություն. թվային ուղղի կամայական կետի շրջակայք կանվանենք այդ կետը պարունակող ցանկացած բաց ենթաբազմություն: Սա հնարավորություն է տալիս նորովի, բաց ենթաբազմության հիմքով, վերաասահմանել նաև ենթաբազմության ներքին կետ, հպման կետ, փակ ենթաբազմություն, զուգամետ հաջորդականություն հասկացությունները. դրա համար բավական է հին սահմանումների ձևակերպումներում ամենուրեք «կետի ε-շրջակայք» փոխարինել «կետի շրջակայք»:

Այսպիսով, թվային ուղղի բաց ենթաբազմություն հասկացությունը հիմնային է և նույնպես որոշում է տոպոլոգիա այդ ուղղի վրա:

Նկատենք, որ ի տարբերություն կետի ε-շրջակայք հասկացության՝ թվային ուղղի բաց ենթաբազմություններն օժտված են պարզ ձևակերպվող և հեշտ ապացուցվող հետևյալ երեք հատկություններով՝

1. ինքը՝ թվային ուղիղը բաց ենթաբազմություն է,
2. ցանկացած քանակով (վերջավոր կամ անվերջ) բաց ենթաբազմությունների միավորումը բաց ենթաբազմություն է,
3. վերջավոր քանակով ցանկացած բաց ենթաբազմությունների հատումը կամ դատարկ է, կամ դարձյալ բաց ենթաբազմություն է:

Ելնելով որոշ տեխնիկական նկատառումներից՝ նպատակահարմար է դատարկ բազմությունը նույնպես համարել բաց ենթաբազմություն (դրան խոչընդոտող որևէ իրական հանգամանք չկա): Արդյունքում 1-ին և 3-րդ հատկությունները կարելի է վերաձևակերպել հետևյալ տեսքով.

1. $\mathbb{R}$-ը և $\varnothing$-ը բաց ենթաբազմություններ են,
3. վերջավոր քանակով ցանկացած բաց ենթաբազմությունների հատումը բաց ենթաբազմություն է:

Թվային ուղղի բաց ենթաբազմությունների այս երեք հատկությունները ընդհանուր դեպքում, այսինքն՝ կամայական բազմության համար, աքսիոմների միջոցով տոպոլոգիա սահմանելու համար:

Էջ 40

Օրինակ → Դիտարկություն 1։
Էջ 40+1

Դիտողություն: Ինչպես գիտենք, էվկլիդեսյան երկրաչափության հիմքում ընկած են երեք տիպի օբյեկտներ, որոնք կոչվում են «կետեր», «ուղիղներ», «հարթություններ» և չեն սահմանվում: Փոխարենը աքսիոմների տեսքով ձևակերպվում են փոխհարաբերություններ այդ օբյեկտների միջև. օրինակ՝ ամեն մի երկու տարբեր կետերով անցնում է ուղիղ, և այն միակն է, կամ՝ ուղղով և նրան չպատկանող կետով կարելի է (դրանց հարթության մեջ) տանել ոչ ավելի, քան մի ուղիղ, որը չի հատում տվյալ ուղղին (զուգահեռության աքսիոմ)։ Այնուհետև զուտ տրամաբանորեն դուրս են բերվում հետևություններ աքսիոմներից, սահմանվում են նոր հասկացություններ, բազմահատկություններ (ատրիբուտներ) այդ հասկացությունների դասերի հատկությունների և այլն։

Նշենք, որ տվյալ երկրաչափության համար աքսիոմների համակարգը որպես կանոն միակը չէ: Օրինակ՝ վերլուծական երկրաչափության դասընթացում (կոորդինատային մեթոդի միջոցով) կառուցվում է էվկիլդեսյան երկրաչափությանը համարժեք երկրաչափություն, որի հիմքում ընկած են «կետ» և «վեկտոր» չսահմանվող հասկացությունները: Այս դեպքում արդեն ուղիղն ու հարթությունը սահմանվում են կետ և վեկտոր հասկացություններով:

Նույնը տեղի ունի նաև տոպոլոգիայի դեպքում. բազմության վրա տոպոլոգիա և տոպոլոգիական տարածություն հասկացությունները կարող են սահմանվել նաև աքսիոմների այլ համակարգերով՝ հիմքում դնելով ոչ թե բաց ենթաբազմություն (չսահմանվող) հասկացությունը, այլ մեկ ուրիշ (կամ մի քանի) դարձյալ չսահմանվող հասկացություն, օրինակ՝ բազմության ~~կետի~~ կետի շրջակայք հասկացություն: Ընդ որում, մի մոտեցման դեպքում տոպոլոգիայի հիմքում ընկած չսահմանվող հասկացությունը կարող է արդեն սահմանվել մեկ այլ մոտեցման դեպքում:

Այժմ ընդհանուր դեպքում սահմանենք բազմության վրա տոպոլոգիա և տոպոլոգիական տարածություն հասկացությունները՝ հիմք ընդունելով բաց բազմություն չսահմանվող հասկացությունը:

Սահմանում: Ասում են, որ կամայական X բազմության վրա տրված է **տոպոլոգիա**, եթե տրված է X-ի որոշ U_i ենթաբազմությունների $\tau = \{U_i,\ i \in I\}$ ընտանիք, որը բավարարում է հետևյալ երեք պայմաններին (աքսիոմներին).

1. X-ը և դատարկ բազմությունը պետք է պատկանեն τ-ին,
2. τ-ի ցանկացած քանակով տարրերի միավորումը պետք է պատկանի τ-ին,
3. τ-ի ցանկացած վերջավոր քանակով տարրերի հատումը նույնպես պետք է պատկանի τ-ին:

   Նկատենք, որ 3-րդ պայմանը կարող է փոխարինվել հետևյալ համարժեք պայմանով՝

3′. τ-ի ցանկացած երկու տարրերի հատումը նորից պետք է պատկանի τ-ին:

~~Այսպիսով տոպոլոգիայի աքսիոմների այս համակարգում ունենք միայն մի չսահմանվող հասկացություն, այն է՝ բաց ենթաբազմության հասկացությունը:~~

(A) տրամաբան էջ 39

3-րդ հատկությունում ներառյալ ենթաբազմությունների քանակն անսահմանափակված է հավասարությունների է հանգում, որ սահմանը բազմության բոլոր ենթաբազմությունների հատումն է կարող է լինել: Օրինակ, բացասական $\bigcap_{n\in N}(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ հատումն ունի միայն մեկ տարր՝ $\{0\}$ ենթաբազմությունն է, որն բաց բազմություն չէ (հակասություն):

Պնդումներ 1: Ցույց տանք, որ բաց բազմությունների 1-3 հատկությունները բերում են դեպի մետրիկ տարածություն, այդ նշանակում հատումների, միավորումների գործողություն և, մասնավորապես n-չափանի $\mathbb{R}^n$ էվկլիդյան տարածությունների բաց ենթաբազմություններ:

Նախնական սահմանումներ հատումների օրինակով, բերելով համապատասխան գծագրեր: Դեպքերը, որ կատարվում են գծերի ε-շրջակայքերը բերում են դեպի մետրիկ ենթաբազմությունների անհամեմատելիություն, հատումների դեպքում կատարվում են հետևյալ գործողությունները: հատումներ դեպքում X ենթաբազմությունը նշվում է երբ բաց ենթաբազմություն, երբ երբ ամենա մի $x^0=(x_1^0, x_2^0)$ կետի համար գոյություն ունի x^0 կենտրոնով, $\varepsilon_0>0$ շառավղով $\{x=(x_1,x_2);\ (x_1-x_1^0)^2+(x_2-x_2^0)^2<\varepsilon^2\}$ սահմանի շրջան, որն ամբողջությամբ մտնում է X-ում:

Պրակտիկ աշխատանքում էջերից • ստուգեցեք մեկնաբանեք դեպքերում ունենք դեպքերի (սարք, հատումներ և և այլն) բաց ենթաբազմությունների սահմանումներ տալու: Բաց դեպքերի դեպքում էջ օգտագործեք նաև մեկնաբանեք 1-3 հատկությունները:

էջ 40+

Սահմանում: X բազմությունը նրա վրա տրված $\tau = \{U_i\}_{i\in I}$ տոպոլոգիայի հետ միասին (այսինքն (X, τ) զույգը) կոչվում է **տոպոլոգիական տարածություն**: X բազմության $x \in X$ տարրերը կոչվում են տոպոլոգիական տարածության **կետեր**, իսկ $U_i \subset X$ ենթաբազմությունները (այսինքն τ տոպոլոգիայի տարրերը) կոչվում են տվյալ տոպոլոգիական տարածության **բաց ենթաբազմություններ**:

բերել էջ 40-ից

(A) Ստորև բերվում են տոպոլոգիաների մի քանի օրինակներ, որոնցից գոյանում են համապատասխան անվանումներով տոպոլոգիական տարածություններ:

Օրինակ 1: Մեկից ավելի տարրեր պարունակող ամեն մի X բազմության վրա կարելի է սահմանել առնվազն երկու տոպոլոգիա.

ա) որպես τ վերցնենք X-ի բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունը: Այս տոպոլոգիան կոչվում է **դիսկրետ տոպոլոգիա** X-ի վրա:

բ) որպես τ վերցնենք միայն X-ից և դատարկ բազմությունից կազմված ընտանիքը՝ $\tau = \{\varnothing, X\}$: Այն կոչվում է **անտիդիսկրետ** տոպոլոգիա X-ի վրա:

Երկու դեպքում էլ 1-3 պայմանների ստուգումը դժվարություն չի հարուցում:

Այսպիսով, **դիսկրետ տոպոլոգիական տարածությունում** (կնշանակենք $(X;$ **դիսկր.**$)$) բաց ենթաբազմություններ են համարվում X-ի բոլոր ենթաբազմությունները: **անտիդիսկրետ տոպոլոգիական տարածությունում** (կնշանակենք $(X;$ **անտ.**$)$) բաց ենթաբազմություններ են միայն X-ը և $\varnothing$-ը:

Օրինակ 2: Դիտարկենք երկու տարր պարունակող որևէ $X = \{x_1, x_2\}$ բազմություն, և նրա ենթաբազմությունների $\tau = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ ընտանիքը: Հեշտությամբ ստուգվում է, որ τ-ն բավարարում է տոպոլոգիայի 1-3 աքսիոմներին: Ստացված (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունը կարճ կոչվում է **կապակցված կետագույգ**: Այս տարածությունում բաց ենթաբազմություններն են $\varnothing$-ը, X-ը և $\{x_1\}$-ը, իսկ $\{x_2\}$ ենթաբազմությունը բաց ենթաբազմություն չէ:

Նկատենք, որ $\forall X = \{x_1, x_2\}$ բազմությունից ստացվում է ճիշտ և ճիշտ չորս տոպոլոգիական տարածություն. դրանք են՝ դիսկրետ, անտիդիսկրետ տարածությունները և երկու կապակցված կետագույգերը (հիմնավորե՛ք, որ տվյալ X-ից այլ տարածություն չկա տարածությունները չի բավարարում):

Օրինակ 3: $\mathbb{R}$ թվային ուղղի վրա դիտարկենք ենթաբազմությունների τ ընտանիք կազմված $\varnothing$ բազմությունից, բոլոր (a, b) ինտերվալներից և դրանց բոլոր հնարավոր միավորումներից: Առաջին երկու պայմանները բավարարվում են անմիջականորեն, ըստ τ-ի սահմանման: Ստուգենք 3 պայմանը՝ 3՝ ինտերվալ: Եթե ունենք τ ընտանիքի որևէ երկու $U_1 = \bigcup\limits_j (a_j, b_j)$, $j \in J$ և $U_2 = \bigcup\limits_k (c_k, d_k)$, $k \in K$ տարրեր (դրանք ինտերվալների միավորումներ են ըստ ինդեքսների J և K բազմությունների), ապա

$$U_1 \cap U_2 = \left(\bigcup_j (a_j; b_j)\right) \cap \left(\bigcup_k (c_k; d_k)\right) = \bigcup_{i,j} ((a_j; b_j) \cap (c_k; d_k))$$

Պարզ է, որ ինտերվալների $(a_j, b_j) \cap (c_k, d_k)$ հատումը կամ դատարկ է, կամ էլ

նորից ինտերվալ է: Ուստի $U_1 \cap U_2 \in \tau$ ըստ τ-ի սահմանման:

Այս տոպոլոգիան կոչվում է թվային ուղղի **սովորական տոպոլոգիա**:

Թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիան շահեկանորեն առանձնանում է $\mathbb{R}$-ի մյուս բոլոր տոպոլոգիաներից: Այդ տոպոլոգիայի հիմքով է կառուցվում մի փոփոխականի ֆունկցիաների մաթեմատիկական անալիզը: Ստացված տոպոլոգիական տարածությունը կնշանակենք ($\mathbb{R}$: **սովոր.**): Այս տարածությունում բաց ենթաբազմություններ են $\varnothing$-ը, բոլոր (a, b) ինտերվալները և նրանց միավորումները:

Մասնավորապես բաց ենթաբազմություններ են նաև $\mathbb{R}$-ը և $(-\infty, a)$, $(b, +\infty)$ տեսքերի ինտերվալները, իսկ մի կետանոց՝ $\{a\}$ տեսքի, նաև $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, a]$, $[b, +\infty)$ տեսքերի ենթաբազմությունները, ինչպես նաև ռացիոնալ թվերի $\mathbb{Q}$, իռացիոնալ թվերի I ենթաբազմությունները բաց ենթաբազմություններ չեն, քանի որ չեն կարող ներկայացվել որպես (a, b) տեսքի ինտերվալների միավորումներ (հիմնավորեք):

Օրինակ 4: Դիցուք X-ը որևէ անվերջ բազմություն է: Դիտարկենք նրա ենթաբազմությունների τ ընտանիքը՝ կազմված X-ից, $\varnothing$-ից և այն բոլոր $U \subset X$ ենթաբազմություններից, որոնց $X \setminus U$ լրացումը վերջավոր բազմություն է: Ցույց տանք, որ τ-ն որոշում է տոպոլոգիա X-ի վրա: Ստուգենք 2-րդ պայմանը: Դիցուք $U_j \in \tau$, $j \in J$, որտեղ J-ն ինդեքսների ինչ-որ բազմություն է: Ըստ դե Մորգանի 1-ին բանաձևի՝ $X \setminus \bigcup\limits_j U_j = \bigcap\limits_j (X \setminus U_j)$: Քանի որ $X \setminus U_j$ լրացումները վերջավոր ենթաբազմություններ են, ուստի նրանց հատումը նույնպես X-ի վերջավոր ենթաբազմություն է: Հետևաբար $\bigcup\limits_j U_j \in \tau$: Ստուգենք 3-րդ պայմանը: Դիցուք $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \tau$: Ըստ դե Մորգանի 2-րդ բանաձևի՝ $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i$ ենթաբազմության $X \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i = \bigcup\limits_{i=1}^{k} (X \setminus U_i)$ լրացումը վերջավոր ենթաբազմություն է: Ուստի $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \in \tau$: Այս տոպոլոգիան կոչվում է **վերջավոր լրացումների տոպոլոգիա** X-ի վրա:

Օրինակ 5: Դիցուք X-ը ոչ հաշվելի որևէ բազմություն է: Դիտարկենք նրա ենթաբազմությունների τ ընտանիքը կազմված X-ից, $\varnothing$-ից և այն բոլոր V ենթաբազմություններից, որոնց $X \setminus V$ լրացումը հաշվելի բազմություն է: Ապա τ-ն տոպոլոգիա է X-ի վրա (կոչվում է **հաշվելի լրացումների տոպոլոգիա**): Ապացուցումը (թողնվում է ընթերցողին) կատարվում է նախորդ օրինակի նմանությամբ՝ հիմնվելով հաշվելի բազմությունների միավորման և հատման հատկությունների վրա:

Կնշանակենք (X, **վերջ. լր.**) և (X, **հաշվ. լր.**) սիմվոլներով այն տոպոլոգիական տարածությունները, որոնք գոյանում են X բազմության համապատասխանաբար վերջավոր լրացումների և հաշվելի լրացումների տոպոլոգիաներով: Համեմատելով դրանք միմյանց հետ՝ նկատենք, որ իռացիոնալ թվերի բազմությունը բաց բազմություն չէ ($\mathbb{R}$, վերջ. լր.) տարածությունում, բայց բաց բազմություն է ($\mathbb{R}$, հաշվ. լր.) տոպոլոգիական տարածությունում (ինչո՞ւ):

Սահմանափակվելով առայժմ 1-5 օրինակներով՝ նկատենք նաև, որ եթե միևնույն X բազմության վրա ունենք որևէ երկու τ_1 և τ_2 տոպոլոգիա, ապա նրանց

$\tau_1 \cap \tau_2$ հատումը նորից տոպոլոգիա է X-ի վրա (հիմնավորե՛ք): Իսկ նրանց $\tau_1 \cup \tau_2$ միավորումը կարող է չլինել տոպոլոգիա X-ի վրա (այդպիսի օրինակ կբերվի թեմա 5-ում): Միևնույն X բազմության վրա տրված տոպոլոգիաների բազմության վրա սահմանվում է մասնակի կարգ՝ «թույլ է», «ուժեղ է» տեսքով:

Սահմանում: Եթե X-ի վրա տրված են երկու՝ τ_1 և τ_2 տոպոլոգիա այնպես, որ $\tau_1 \subset \tau_2$ ապա ասում են, որ τ_1-ը **ուժեղ չէ** τ_2-ից, կամ τ_2-ը **թույլ չէ** τ_1-ից: Եթե $\tau_1 \subset \tau_2$ և $\tau_1 \neq \tau_2$, ապա ասում են, որ τ_1-ը **թույլ է** τ_2-ից (τ_2-ը **ուժեղ է** τ_1-ից):

Միևնույն X բազմության վրա բոլոր տոպոլոգիաներից անտիդիսկրետ տոպոլոգիան ամենաթույլ, իսկ դիսկրետ տոպոլոգիան ամենաուժեղ տոպոլոգիաներն են: Նկատենք, որ նույն X-ի վրա որևէ երկու տոպոլոգիաներ միշտ չէ, որ համեմատելի են:

Օրինակ 6: Եթե $X = \{x_1, x_2\}$, ապա $\tau_1 = \{\varnothing, \{x_1\}, \{x_1, x_2\}\}$ և $\tau_2 = \{\varnothing, \{x_2\}, \{x_1, x_2\}\}$ տոպոլոգիաները համեմատելի չեն, քանի որ $\{x_1\} \in \tau_1$, բայց $\{x_1\} \notin \tau_2$, ինչպես նաև $\{x_2\} \in \tau_2$, բայց $\{x_2\} \notin \tau_1$:

Օրինակ 7: Ցույց տանք, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիան ուժեղ է $\mathbb{R}$-ի վերջավոր լրացումների տոպոլոգիայից: Պարզ է, որ $(0, 1)$ ինտերվալը պատկանում է դրանցից առաջինին և չի պատկանում երկրորդին: Մյուս կողմից, եթե $U \subset \mathbb{R}$ ենթաբազմությունը պատկանում է երկրորդին, ապա $\mathbb{R} \setminus U$ լրացումը վերջավոր բազմություն է, ուստի կամ $U = \mathbb{R}$, կամ $\mathbb{R} \setminus U = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$: ~~որտեղ~~ ~~$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$~~ : Երկրորդ դեպքում, համարելով $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, կունենանք $U = (-\infty, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup \cdots \cup (x_{n-1}, x_n) \cup (x_n, +\infty)$, և հետևաբար U-ն պատկանում է $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիային (ինչի՞ց է դա հետևում):

Ընթերցողին առաջարկում ենք ցույց տալ (որպես օգտակար խնդիր), որ թվային ուղղի հաշվելի լրացումների տոպոլոգիան ուժեղ է վերջավոր լրացումների տոպոլոգիայից, բայց համեմատելի չէ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայի հետ:

Այժմ ցույց տանք, որ հնարավոր է ներմուծել **կետի շրջակայք** հասկացություն բոլոր տոպոլոգիական տարածություններում որպես հիմնական այլընտրանքային հասկացություն:

Սահմանում: (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում $x \in X$ կետի **բաց շրջակայք** կոչվում է այդ կետը պարունակող X-ի ցանկացած բաց ենթաբազմություն: Այնուհետև, x **կետի շրջակայք** կոչվում է ցանկացած $V \subset X$ ենթաբազմություն, որն իր մեջ ընդգրկում է x-ի որևէ U բաց շրջակայք:

Այսպիսով, կարճ՝ $V \subset X$ ենթաբազմությունը շրջակայք է x կետի համար, եթե գոյություն ունի U բաց ենթաբազմություն, որ $x \in U \subset V$: Նկատենք նաև, որ ընդհանուր դեպքում կետի շրջակայքը կարող է չլինել այդ կետի բաց շրջակայք:

Օրինակ 8: (X, դիսկր.) տարածությունում x կետը պարունակող X-ի բոլոր ենթաբազմությունները (բաց) շրջակայքեր են x-ի համար: Մասնավորապես, $\forall x \in X$

կետի համար $\{x\}$ ենթաբազմությունը x կետի բաց շրջակայք է: Իսկ $(X,$ անտ.$)$ տարածությունում ցանկացած կետ ունի միայն մի շրջակայք, որը ինքը՝ X-ն է: Այս դեպքում արդեն $\{x\}$ ենթաբազմությունը x կետի շրջակայք չէ, եթե X-ը պարունակում է մեկից ավելի կետեր: Դիտարկենք ևս երկու օրինակ.

Օրինակ 9: $(\mathbb{R},$ սովոր.$)$ տարածությունում $x = 0{,}5$ կետի համար հետևյալ՝ $(0;1)$, $[0;1)$, $(0;1]$, $[0;1]\cup\{3\}$ ենթաբազմությունները շրջակայքեր են, ընդ որում դրանցից միայն առաջինն է բաց շրջակայք: Իսկ $x = 0, 1, 3$ կետերի համար դրանցից ոչ մեկը շրջակայք չէ (հիմնավորե՛ք):

Օրինակ 10: $(\mathbb{R},$ վերջ. լր.$)$ տարածությունում իռացիոնալ թվերի բազմությունը շրջակայք չէ իր կետերից ոչ մեկի համար: Իսկ $(\mathbb{R},$ հաշվ. լր.$)$ տարածությունում այն շրջակայք է իր ցանկացած կետի համար (հիմնավորե՛ք):

Թեորեմ 1: (X,τ) տոպոլոգիական տարածությունում որևէ $W \subset X$ ենթաբազմություն բաց ենթաբազմություն է այն և միայն այն դեպքում, երբ այն շրջակայք է իր ցանկացած կետի համար:

Ապացուցում: Եթե W-ն բաց ենթաբազմություն է, ապա այն (բաց) շրջակայք է իր ցանկացած $w \in W$ կետի համար (ըստ կետի շրջակայքի սահմանման): Այժմ հակառակը՝ դիցուք W-ն շրջակայք է իր (ցանկացած) w կետի համար: Նշանակում է՝ գոյություն ունի $U(w) \in \tau$ բաց ենթաբազմություն, որ $w \in U(w) \subset W$: Ուստի W-ն կարող է ներկայացվել որպես բաց ենթաբազմությունների միավորում՝ $W = \bigcup\limits_{w} U(w)$: Հետևաբար W-ն բաց ենթաբազմություն է ըստ տոպոլոգիայի 2-րդ աքսիոմի: ■

Վերը մենք նշեցինք, որ կետի շրջակայք հասկացությունը հիմնային հասկացություն է թվային ուղղի տոպոլոգիայի համար: Պարզվում է, որ այն հիմնային հասկացություն է ցանկացած տոպոլոգիական տարածությունում: Իր նշանակությամբ այն հավասարազոր է բաց բազմություն հասկացությանը (պատմականորեն, տոպոլոգիայի՝ որպես մաթեմատիկայի բաժին ձևավորման առաջին փուլում տոպոլոգիական տարածությունները սահմանվել են կետերի շրջակայքերի միջոցով և կոչվել են **շրջակայքային տարածություններ**):

Սա պարզաբանելու նպատակով նախ թվարկենք շրջակայքերի հիմնական հատկությունները:

Թեորեմ 2: Դիցուք (X,τ)-ն որևէ տոպոլոգիական տարածություն է: Ապա X-ի կետերի շրջակայքերն օժտված են հետևյալ 4 հատկություններով.

1. ամեն մի x կետ պատկանում է իր ցանկացած շրջակայքի,
2. եթե V-ն x կետի շրջակայք է և $V \subset W$, ապա W-ն նույնպես x կետի շրջակայք է,

3. x կետի ցանկացած վերջավոր քանակով շրջակայքերի հատումը նորից x-ի շրջակայք է,

4. x կետի ցանկացած V շրջակայքի համար գոյություն ունի այդ կետի այնպիսի U շրջակայք, որ $U \subset V$, և U-ն շրջակայք է իր ցանկացած կետի համար:

Ապացուցում: Առաջին հատկությունն ակնհայտ է, ցույց տանք երկրորդը: Եթե V-ն x կետի որևէ շրջակայք է, ապա ըստ սահմանման գոյություն ունի x-ի U բաց շրջակայք, որ $x \in U \subset V$: Քանի որ $V \subset W$ և $x \in U \subset W$, ուստի W-ն նույնպես շրջակայք է x կետի համար:

Ապացուցենք 3-ը: Դիցուք V_1-ը և V_2-ը x կետի որևէ երկու շրջակայքեր են: Ըստ սահմանման գոյություն ունեն X-ի U_1 և U_2 բաց ենթաբազմություններ, որ $x \in U_1 \subset V_1$ և $x \in U_2 \subset V_2$: Ըստ տոպոլոգիայի երրորդ աքսիոմի՝ $U_1 \cap U_2$-ը բաց ենթաբազմություն է X-ում, և քանի որ $x \in U_1 \cap U_2 \subset V_1 \cap V_2$, ուստի $V_1 \cap V_2$-ը x կետի շրջակայք է: Այժմ հատկություն 3-ը ստացվում է պարզ ինդուկցիայով:

Ապացուցենք 4-ը: x կետի կամայական V շրջակայքի համար գոյություն ունի U բաց ենթաբազմություն, որ $x \in U \subset V$: Համաձայն թեորեմ 1-ի՝ U-ն շրջակայք է իր ցանկացած y կետի համար: Ուստի $U \in S_y$ կամայական $y \in U$ կետի դեպքում: ■

Այս 1-4 հատկությունները լիովին բնութագրում են կետերի շրջակայքերը տոպոլոգիական տարածություններում այն իմաստով, որ կարող են դիտարկվել որպես աքսիոմներ՝ բազմության վրա տոպոլոգիայի այլընտրանքային սահմանման համար: Նախ (X, τ) տարածության ամեն մի $x \in X$ կետի համար նշանակենք S_x-ով այդ կետի բոլոր շրջակայքերի բազմությունը:

Թեորեմ 3 (շրջակայքերի միջոցով տոպոլոգիայի տրման մասին)**:** Դիցուք X-ը կամայական բազմություն է, և դիցուք ամեն մի $x \in X$ տարրի ինչ-որ եղանակով համադրված է X-ի ենթաբազմությունների մի ինչ-որ $\hat{S}_x$ ընտանիք այնպես, որ տեղի ունեն բերվող 1^*-4^* հատկությունները (աքսիոմները).

1^*. x-ը պատկանում է $\hat{S}_x$-ի բոլոր տարրերին,

2^*. եթե $V \in \hat{S}_x$ և $V \subset W$, ապա W-ն ևս պատկանում է $\hat{S}_x$-ին,

3^*. $\hat{S}_x$-ի ցանկացած վերջավոր տարրերի հատումը նույնպես պատկանում է $\hat{S}_x$-ին,

4^*. ցանկացած $V \in \hat{S}_x$ տարրի համար գոյություն ունի այնպիսի $U \in \hat{S}_x$ տարր, որ $U \subset V$ և $U \in \hat{S}_y$ ցանկացած $y \in U$ տարրի դեպքում:

Ապա X բազմության վրա գոյություն ունի միակ այնպիսի τ տոպոլոգիա, որ (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում կետի շրջակայքերի S_x ընտանիքը համընկնում է ենթաբազմությունների $\hat{S}_x$ ընտանիքի հետ:

Ապացուցում: Սահմանենք X-ում ենթաբազմությունների τ ընտանիք կազմված $\varnothing$-ից և այն բոլոր U ենթաբազմություններից, որ U-ն պատկանում է $\hat{S}_x$ ընտանիքին ամեն մի $x \in U$ տարրի դեպքում: Այժմ 1^* և 2^* աքսիոմներից հետևում է, որ ինքը՝ X-ը պատկանում է բոլոր $\hat{S}_x$ ընտանիքներին, ուստի $X \in \tau$: Այսինքն τ-ն բավարարում է տոպոլոգիայի առաջին աքսիոմին:

Ցույց տանք, որ τ-ն բավարարում է նաև տոպոլոգիայի երկրորդ աքսիոմին: Դիցուք $U = \bigcup\limits_i U_i$, որտեղ $U_i \in \tau$, $i \in I$, իսկ I-ն ինդեքսների որևէ բազմություն է: Կամայական $x_0 \in U$ տարրի համար գոյություն ունի U_{i_0}, որ $x_0 \in U_{i_0}$, $i_0 \in I$: Այժմ τ ընտանիքի սահմանումից հետևում է, որ $U_{i_0} \in \hat{S}_{x_0}$, և քանի որ $U_{i_0} \subset U$, ուստի U-ն նույնպես պատկանում է $\hat{S}_{x_0}$ ընտանիքին՝ ըստ 2^* աքսիոմի: Հետևաբար $U \in \tau$ ըստ τ ընտանիքի սահմանման: Այսպիսով τ-ն բավարարում է տոպոլոգիայի երկրորդ աքսիոմին:

Ստուգենք տոպոլոգիայի երրորդ աքսիոմը. դիցուք $U = U_1 \cap U_2$, որտեղ $U_1, U_2 \in \tau$, և ցույց տանք, որ $U \in \tau$: Կամայական $x_0 \in U$ տարրի դեպքում ունենք $x_0 \in U_1$, $x_0 \in U_2$, և ունենք նաև $U_1 \in \hat{S}_{x_0}$, $U_2 \in \hat{S}_{x_0}$ (ըստ τ ընտանիքի սահմանման): Ուստի $U \in \hat{S}_{x_0}$ ըստ 3^* աքսիոմի, հետևաբար $U \in \tau$ (ըստ τ ընտանիքի սահմանման): Ուրեմն τ-ն բավարարում է նաև տոպոլոգիայի երրորդ աքսիոմին:

Այժմ ամեն մի $x \in X$ կետի համար դիտարկենք x-ի բոլոր շրջակայքերի S_x ընտանիքը (X, τ) տոպոլոգիական տարածությունում և ցույց տանք, որ տեղի ունի $S_x = \hat{S}_x$ համընկնում:

Եթե $V \in S_x$, այսինքն V-ն x կետի որևէ շրջակայք է (X, τ) տարածությունում, ապա գոյություն ունի U բաց ենթաբազմություն, որ $x \in U \subset V$: Քանի որ $U \in \hat{S}_{x_0}$, ուստի աքսիոմ 2^*-ից ստանում ենք՝ $V \in \hat{S}_{x_0}$, և ուրեմն $S_x \subset \hat{S}_{x_0}$: Հակառակ՝ $\hat{S}_{x_0} \subset S_x$ ներդրումը հաստատելու համար դիտարկենք X-ի կամայական $V \in \hat{S}_{x_0}$ ենթաբազմություն: Ըստ 4^* աքսիոմի՝ գոյություն ունի X-ի $U \in \hat{S}_{x_0}$ ենթաբազմություն, որ $U \subset V$, և U-ն պատկանում է $\hat{S}_y$ ընտանիքին ամեն մի $y \in U$ տարրի դեպքում: Նշանակում է՝ $U \in \tau$ ըստ τ ընտանիքի սահմանման: Այսպիսով ունենք՝ $x \in U \subset V$, ուրեմն V-ն x կետի շրջակայք է τ տոպոլոգիայում, ուստի $U \in S_x$: Հետևաբար $\hat{S}_{x_0} \subset S_x$, և ունենք $S_x = \hat{S}_{x_0}$ համընկնում

Վերջապես նկատենք, որ τ տոպոլոգիայի միակությունը հետևանք է հետևյալ դիտողությունից. եթե X բազմության որևէ երկու տոպոլոգիայում ցանկացած x կետի շրջակայքերը համընկնում են, ապա այդ տոպոլոգիաները նույնական են: ■

Խնդիրներ և հարցեր թեմա 4-ի վերաբերյալ

1.1. Ապացուցեք, որ թվային ուղղի ամեն մի ինտերվալ կարող է ներկայացվել որպես $[a, b]$ տեսքի հատվածների միավորում:

1.2. Ապացուցեք, որ թվային ուղղի վերջավոր քանակով կամայական ինտերվալների հատումը կամ դատարկ է, կամ ինտերվալ է:

1.3. Ապացուցեք, որ թվային ուղղի անվերջ քանակով կամայական ինտերվալների հատումը կարող է լինել $\varnothing$, $\{a\}$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ տեսքերի ենթաբազմություններից որևէ մեկը: Այդ 6 տեսքերից յուրաքանչյուրի համար կառուցեք այդպիսի հատումների մեկական օրինակ:

1.4. Դիտարկենք երեք տարրից կազմված որևէ $X = \{a, b, c\}$ բազմություն և նրա ենթաբազմությունների հետևյալ ընտանիքները.

$$\Phi_1 = \{\varnothing, \{c\}, \{a, b\}, X\},$$
$$\Phi_2 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\},$$
$$\Phi_3 = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\},$$
$$\Phi_4 = \{\varnothing, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}:$$

ա) Դրանցից որո՞նք են որոշում X բազմության տոպոլոգիա:

բ) Գտեք X-ի վրա իրարից տարբեր բոլոր տոպոլոգիաները:

1.5. Որոշու՞մ է արդյոք տոպոլոգիա բոլոր բնական թվերի $\mathbb{N}$ բազմության վրա ~~նրա~~ ենթաբազմությունների հետևյալ ընտանիքը.

ա) $\{\varnothing, \{V_n \mid V_n \subset \mathbb{N},\ n \geq 1\}\}$, որտեղ $V_n = \{n, n+1, \dots\}$,

բ) $\{\mathbb{N}, \{W_n \mid W_n \subset \mathbb{N},\ n \geq 1\}\}$, որտեղ $W_n = \{x \mid x \in \mathbb{N}$ և $x < n\}$:

1.6. Ճի՞շտ է արդյոք, որ թվային ուղղի սովորական տոպոլոգիայում ամեն մի ոչ դատարկ բաց ենթաբազմություն կարող է ներկայացվել որպես $[a, b]$ տեսքի հատվածների միավորում:

1.7. Ապացուցեք, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի ենթաբազմությունների հետևյալ համախմբություններից ոչ մեկը տոպոլոգիա չէ $\mathbb{R}$-ի համար.

ա) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{(-\infty, x]$, որտեղ x-ը կամայական թիվ է $\mathbb{R}$-ում$\}$,

բ) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{(a, b)$, որտեղ $a, b \in \mathbb{R}$ կամայական են և $a < b\}\}$:

1.8. $\mathbb{R}$ թվային ուղղի ենթաբազմությունների հետևյալ ընտանիքներից որո՞նք են որոշում տոպոլոգիա $\mathbb{R}$-ի վրա.

ա) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}$ կամայական թիվ է$\}\}$,

բ) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{Q}$ կամայական ռացիոնալ թիվ է$\}\}$,

գ) $\{\varnothing,\ \{(-\infty, -x] \cup (x, +\infty) \mid x \geq 0$ կամայական թիվ է$\}\}$,

դ) $\{\varnothing,\ \mathbb{R},\ \{[-x, x) \mid x > 0$ կամայական իռացիոնալ թիվ է$\}$:

1.9. Դիցուք X-ը որևէ ոչ հաշվելի բազմություն է: Ապացուցեք, որ օրինակ 5-ում սահմանված ենթաբազմությունների τ ընտանիքը որոշում է տոպոլոգիա X-ի վրա:

1.10. Ապացուցեք, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի հաշվելի լրացումների տոպոլոգիան ուժեղ է $\mathbb{R}$-ի վերջավոր լրացումների տոպոլոգիայից:

1.11. Ապացուցեք, որ $\mathbb{R}$ թվային ուղղի հաշվելի լրացումների տոպոլոգիան համեմատելի չէ $\mathbb{R}$-ի սովորական տոպոլոգիայի հետ:

1.12. Հանդիսանու՞մ է արդյոք շրջակայք ուղղի $\sqrt{2}$ կետի համար բոլոր իռացիոնալ թվերից կազմված ենթաբազմությունը

ա) ($\mathbb{R}$, սովոր.) տարածությունում,

բ) ($\mathbb{R}$, վերջ. լր.) տարածությունում,

գ) ($\mathbb{R}$, հաշվ. լր.) տարածությունում: